Итоговым шагом является непосредственно сегментация факела выбросов. Напомним, что в виду того, что факел выбросов обладает высокой температурой, матрица температуры обладает большей информацией для сегментации.

Для сегментации было решено использовать классические алгоритмы сегментации. Ввиду малого контраста изображения было решено использовать алгоритм <<WaterShed>> или метод сегментации водоразделом [\ref{Implementation of watershed segmentation}], так как этот алгоритм наилучшим образом работает с низко-контрастными изображениями.

Рассмотрим некоторые математические понятия, необходимые нам для описания математической модели алгоритма сегментации водоразделами. Рассмотрим понятие секции уровня $Z\_i(f)$ как следующее множество:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

Z\_i(f) = \{x\in \mathbb{Z}^2:~f(x)\le i\}.

\vspace\*{-0.3cm}

\label{Z\_i(f)}

\end{equation\*}

Рассмотрим математическую модель данного алгоритма. Для этого введем понятие геодезического расстояния $d\_X(x,y)$ между некоторыми точками $x$ и $y$, принадлежащими некоторому множеству $X$. Данное расстояние будем считать равным длине кратчайшего пути, соединяющего $x$ и $y$ и принадлежащего множеству $X$ (если таковой существует). Путем $p(x,y)$ будем называть некоторую последовательность точек $s$, состоящую из $n$ точек, для которой справедливо, что $s\_i$ и $s\_{i+1}$ являются соседними точками, для $\forall i~\in~[0,~n-1]$, где $s\_0 = x$ и $s\_n = y$. Длинна такого пути будет равна $n$ (см.~рисунок~\ref{fig:gerodesic\_distance}).

\begin{figure}[h!]

\centering

\includegraphics[width = 0.5\textwidth]{image/chapter\_2/gerodesic\_distance}

\caption{Пример геодезического \\ расстояния}

\label{fig:gerodesic\_distance}

\end{figure}

Также введем понятие топографической поверхности как множества точек вида $\{x, f(x)\}$. Тогда не восходящий путь между двумя точками $s\_1(x\_1,f(x\_1))$ и $s\_2(x\_2,f(x\_2))$ определим как некоторый путь, такой, что все точки включенные в путь отвечают следующему условию:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

\forall s\_i(x\_i,~f(x\_i)),~s\_j(x\_j,~f(x\_j)):~i\ge j \Leftrightarrow f(x\_i) \le f(x\_j).

\vspace\*{-0.3cm}

\label{z\_X(Y\_i)}

\end{equation\*}

Тогда локальным минимумом назовем точку, из которой не существует не восходящих путей, локальным максимумом назовем точку, все пути из которой являются невосходящими (см.~рисунок~\ref{fig:loc\_watershed}). Распределим локальные минимумы в некоторый набор множеств $M\_k$, таких, что:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

\forall s\_i(x\_i,~f(x\_i)),~s\_j(x\_j,~f(x\_j)) \in M\_k:~\exists p(s\_i,~s\_j) \in M\_k.

\vspace\*{-0.3cm}

\label{z\_X(Y\_i)}

\end{equation\*}

\begin{figure}[h!]

\begin{subfigure}{.45\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = \textwidth]{image/chapter\_3/loc\_min\_watershed}

\caption{}

\end{subfigure}

\begin{subfigure}{.45\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = \textwidth]{image/chapter\_3/loc\_max\_watershed}

\caption{}

\end{subfigure}

\centering

\caption{Пример локальных: a) минимума; б) максимума}

\label{fig:loc\_watershed}

\end{figure}

Другим важным понятием является геодезическая зона влияния. Пусть существует последовательность непересекающихся подмножеств $Y\_i\in X$. Тогда геодезическую зону влияния подмножества $Y\_i$ определим следующим образом:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

\textup{z}\_X(Y\_i) = \{x\in X:d\_X(x,Y\_i)\textup{ конечна, }\forall j\ne i,~d\_X(x,Y\_j)>d\_X(x,Y\_i)\}.

\vspace\*{-0.3cm}

\label{z\_X(Y\_i)}

\end{equation\*}

Помимо этого введем понятие восстановленного по $X$ множества из маркеров $Y$, вычисляемого по формуле:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

R\_X(Y) = \{x\in X: \exists y \in Y,~d\_X(x,~y)\textup{ конечна}\}.

\vspace\*{-0.3cm}

\label{z\_X(Y\_i)}

\end{equation\*}

Определим также границы зон влияния $\textup{SKIZ}\_X(Y)$ (см.~рисунок~\ref{fig:SKIZ}) следующим образом:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

\textup{SKIZ}\_X(Y) = X~/~\textup{IZ}\_X(Y),~~~\textup{IZ}\_X(Y) = \bigcup\_{i} \textup{z}\_X(Y\_i).

\vspace\*{-0.3cm}

\label{SKIZ\_X(Y)}

\end{equation\*}

\begin{figure}[h!]

\centering

\includegraphics[width = 0.6\textwidth]{image/chapter\_2/SKIZ}

\caption{Пример нахождения зон \\влияния и их границ}

\vspace\*{0.4cm}

\label{fig:SKIZ}

\end{figure}

Теперь представим изображение в виде топографической поверхности. Предположим теперь что мы делаем проколы во всех связных множествах $M\_i$ и погружаем топографическую поверхность с постоянной скоростью под воду. Во время наводнения два или более потоков воды (из разных $M\_i$) могут соединится воедино, чтобы это предотвратить мы строим плотины в тех местах где они сталкиваются. После этого остаются только плотины, компоненты связности, образованные этими плотинами, назовем бассейнами и обозначим $\textup{CB}\_i$, каждая из которых соответствует одному связному множеству $M\_i$. Пример затопления представлен на рисунке~\ref{fig:potop\_watershed}.

\begin{figure}[h!]

\begin{subfigure}{.49\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = \textwidth]{image/chapter\_3/potop1\_watershed}

\caption{}

\end{subfigure}

\begin{subfigure}{.49\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = \textwidth]{image/chapter\_3/potop2\_watershed}

\caption{}

\end{subfigure}

\centering

\caption{Пример затопления: a) последовательные уровни затопления; б) сопоставление поверхности с видом сверху}

\label{fig:potop\_watershed}

\end{figure}

Более строгое математическое описание данного алгоритма можно привести, используя ранее введенные нами термины. Рассмотрим на рисунке~\ref{fig:SKIZ\_Watershed\_build} секцию уровня $Z\_i(f)$ на уровне $i$, предположим, что вода достигла этого уровня. Рассмотрим теперь секцию уровня $Z\_{i + 1}(f)$ на уровне $i + 1$. Нетрудно заметить, что затопление распространяется в геодезической зоне влияния компонент связности $Z\_i(f)$ на секцию уровня $Z\_{i+1}$. Пусть на уровне $Z\_i(f)$ имеем $m$ компонент связности, являющихся бассейнами, обозначим их $B\_{i,k}$, где $k \in [1,~m]$. тогда:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

B\_{i+1,k} = \textup{z}\_{Z\_{i + 1}}(B\_{i,k}).

\vspace\*{-0.3cm}

\label{IZ\_X(Y)}

\end{equation\*}

Тогда некоторые компоненты связности не будут включены в полученные бассейны. Предположим, что имеется $q$ таких компонент связности. $j$-ую компоненту связности ($j \in [1,~q]$) обозначим $B\_{i+1,m+j}$. При этом будет выполнятся следующее тождество:

\begin{equation\*}

\bigcup\_{j} B\_{i+1,m+j} = Z\_{i+1}(f)~/~R\_{Z\_{i + 1}(f)}\left(\bigcup\_{k} B\_{i+1,k}\right).

\label{IZ\_X(Y)}

\end{equation\*}

При этом водоразделы будут равны в точности $\textup{SKIZ}\_{Z\_{i+1}}(B)$, а бассейны на уровне $i+1$ будут являтся в точности множеством $B\_{i+1}$. Итерации следует проводить пока не выполнено $Z\_i(f) = X$. Начальное множество бассейнов $B\_0 = \varnothing$.

\begin{figure}[h!]

\begin{subfigure}{.28\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = 1\textwidth]{image/chapter\_2/SKIZ\_Watershed\_build1}

\caption{}

\end{subfigure}

\begin{subfigure}{.20\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = \textwidth]{image/chapter\_2/SKIZ\_Watershed\_build2}

\caption{}

\end{subfigure}

\begin{subfigure}{.46\textwidth}

\centering

\includegraphics[width = \textwidth]{image/chapter\_2/SKIZ\_Watershed\_build3}

\caption{}

\end{subfigure}

\centering

\caption{Пример построения водораздела:\\ a) секции уровня $Z\_i$ и $Z\_{i+1}$; б) построенный SKIZ;\\ в) построенный водораздел и минимум на уровне $i+1$}

\label{fig:SKIZ\_Watershed\_build}

\end{figure}

К сожалению данный алгоритм, в своем базовом варианте имеет существенный недостаток -- пересегментацию, а именно выделение слишком большого количества классов на изображении. Решением данной проблемы является выделение множества маркеров, соответствующих некоторым классам.

Модифицированный таким образом алгоритм можно разделить на два этапа. Первый этап -- это так называемая гомотопическая модификация градиента. Она состоит в функции градиента. Функция градиента будет в целом похожа на изначальную, с некоторыми отличиями (см.~рисунок~\ref{fig:Watershed\_markers\_modification}). Для модификации мы заменим множество изначальных минимумов на маркеры. Новый градиент обозначим $g^\prime$. Более формально для каждого уровня $i$ проведем следующее преобразование:\vspace\*{-0.3cm}

\begin{equation\*}

\forall i, Z\_i(g^\prime)=R\_{Z\_i(g)\cup M}(M),

\vspace\*{-0.3cm}

\label{IZ\_X(Y)}

\end{equation\*}

где $g$ -- исходная функция градиента. Это преобразование также называется геодезической реконструкцией функции.

На этом первый этап завершается. Вторым этапом будет применение ранее рассмотренного алгоритма к измененному градиенту $g^\prime$.

\begin{figure}[h!]

\centering

\includegraphics[width = 0.6\textwidth]{image/chapter\_2/Watershed\_markers\_modification}

\caption{Пример модификации \\двумерной функции}

\label{fig:Watershed\_markers\_modification}

\end{figure}

В результате рассмотренный алгоритм обладает высокой устойчивостью к шумам, так как незначительные локальные минимумы не влияют на результат работы алгоритма. Как следствие, хорошо подходит для решения поставленной нами задачи.

полученных